



TITLE:

# 実数体上の接方向的性質の実閉体 上への一般化 (可微分写像の特異点 論とそれに関連する幾何学)

AUTHOR(S):

小池, 敏司

---

CITATION:

小池, 敏司. 実数体上の接方向的性質の実閉体上への一般化 (可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学). 数理解析研究所講究録 2010, 1707: 67-75

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170146>

RIGHT:

# 実数体上の接方向的性質の実閉体上への一般化

兵庫教育大学大学院学校教育研究科 小池敏司 (Satoshi Koike)  
Faculty of School Education, Hyogo University of Teacher Education

## §1. 序

シドニー大学の Tzee-Char Kuo は、実解析的特異点に対する望ましい同値関係を導入し、それに関する理論を構築しようとして、実解析関数芽に対してブロー解析同値の概念を導入した ([11])。それ以後、Kuo や同僚の L. Paunescu だけでなく、多くの日本人研究者やヨーロッパの研究者達の貢献により、その分野はブロー解析理論として確立されて来た。ブロー解析理論に関する概説については、[5]、[6] を見られたい。

このブロー解析同値はリプシッツ同値であるかという問題に対し、ミルナー数一定だが B. Teissier ([14]) の意味での  $\mu^*$  一定でないことで有名な複素多項式族である Briançon-Speder 族 ([1]) や岡族 ([13]) を実多項式族として考えると、それらは関数族としてブロー解析自明だが零点集合族としてもリプシッツ自明でないことが示される ([8])。ここでは、後者の岡族が零点集合族としてリプシッツ自明でないことの証明方針を紹介する。

例 (1.1)  $J := \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1 + \epsilon\}$ 、但し、 $\epsilon$  を十分小の正数とし、 $f_t : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ 、 $t \in J$  を次の式で定義された孤立特異点を持つ多項式関数族とする：

$$f_t(x, y, z) := x^8 + y^{16} + z^{16} + tx^5z^2 + x^3yz^3$$

ここで、[8] で行った考察を思い起こそう。

$$f(x, y, z) := f_0(x, y, z) = x^8 + y^{16} + z^{16} + x^3yz^3$$

とおくと、 $f^{-1}(0) - \{0\}$  は各座標平面と交わりを持たない。

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x > 0, y > 0, z < 0\}, & A_2 &:= \{x > 0, y < 0, z > 0\}, \\ A_3 &:= \{x < 0, y > 0, z > 0\}, & A_4 &:= \{x < 0, y < 0, z < 0\} \end{aligned}$$

とし、 $S_i := f^{-1}(0) \cap A_i$ 、 $1 \leq i \leq 4$  とおく。そのとき、 $f^{-1}(0) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{0\}$  で、各  $\overline{S_i} = S_i \cup \{0\}$  は球面  $S^2$  に同相である。また、 $i \neq j$  に対し、 $0 \in \mathbb{R}^3$  での  $S_i$  と  $S_j$  の共通接線方向は 1 つ (一点) である。

次に、

$$A_5 := \{x < 0, y < 0, z > 0\}, \quad A_6 := \{x < 0, y > 0, z < 0\}$$

とおくと、 $t$  が 0 から 1 に動くとき、 $f_t^{-1}(0)$  は  $A_5$  と  $A_6$  の中に膨らんでいく。

$$g(x, y, z) := f_1(x, y, z) = x^8 + y^{16} + z^{16} + x^5z^2 + x^3yz^3$$

とおくと、 $g^{-1}(0) - \{0\}$  は  $(x, y)$ -平面、 $(y, z)$ -平面と交わりを持たない。

$$B_1 := \{x > 0, y > 0, z < 0\}, \quad B_2 := \{x > 0, y < 0, z > 0\}, \\ B_3 := \{x < 0, z > 0\}, \quad B_4 := \{x < 0, z < 0\}$$

とし、 $P_i := g^{-1}(0) \cap B_i, 1 \leq i \leq 4$  とおく。そのとき、 $g^{-1}(0) = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup \{0\}$  で、各  $\overline{P_i} = P_i \cup \{0\}$  は  $S^2$  に同相である。また、 $P_3$  と  $P_4$  の  $0 \in \mathbb{R}^3$  での共通接線方向は 1 方向でなく、1 次元的である。

[8] では、 $(\mathbb{R}^3, f_0^{-1}(0))$  と  $(\mathbb{R}^3, f_1^{-1}(0))$  がリプシッツ同値なら、 $P_3$  と  $P_4$  の  $0 \in \mathbb{R}^3$  での共通接線方向の次元は、 $P_3, P_4$  に写ってくる  $S_i, S_j$  の  $0 \in \mathbb{R}^3$  での共通接線方向の次元に一致することを示し、岡族の零点集合族がリプシッツ自明でないことを見た。

上の例で行った考察をもっと一般的に定式化できないか、言い換えると、なんらかのリプシッツ不変量を導入できないかという観点から、次の概念を導入する。

**定義 (1.2)**  $A$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分集合の  $0 \in \mathbb{R}^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A}$  を満たすものとする。このとき、 $A$  の  $0 \in \mathbb{R}^n$  での接方向集合 (direction set)  $D(A)$  を次のように定義する：

$$D(A) := \{a \in S^{n-1} \mid \exists \{x_i\} \subset A \setminus \{0\}, x_i \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \frac{x_i}{\|x_i\|} \rightarrow a, i \rightarrow \infty\}$$

ここで、 $S^{n-1}$  は、 $\mathbb{R}^n$  のなかの  $0 \in \mathbb{R}^n$  を中心とする  $(n-1)$  次元単位球面を表す。

$LD(A)$  を  $D(A)$  の  $0 \in \mathbb{R}^n$  を頂点とする半錐とする：

$$LD(A) := \{ta \in \mathbb{R}^n \mid a \in D(A), t \geq 0\}$$

これを  $A$  の  $0 \in \mathbb{R}^n$  での**実接錐** (real tangent cone) と呼ぶ。

**例 (1.3)**  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $h(x, y, z) = (x, y, z^3)$  で定義される半代数的同相写像とし、 $V, W$  を次で与えられる実代数的集合とする：

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^6 = 0\}, \quad W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

このとき、 $W = h(V)$  であり、 $\dim D(V) = 0$  だが  $\dim D(h(V)) = 1$  である。従って、接方向集合の次元は、実代数的集合の位相不変量でない。

**例 (1.4)**  $h: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  を  $h(r, \theta) = (r, \theta - \log r)$  で定義されるリプシッツ同相写像とする。このとき、半直線  $A := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$  は、 $h$  によって Quick Spiral と呼ばれる螺旋に写され、 $\dim D(A) = 0$  だが  $\dim D(h(A)) = 1$  である。従って、接方向集合の次元はリプシッツ不変量でない。

例 (1.4) において、 $A$  は半代数的集合だが、 $h(A)$  は広中先生 ([7]) の意味での部分解析的集合 (subanalytic set) でもない。ここで、次の問題を考える。

**問題 (1.5)**  $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分集合の  $0 \in \mathbb{R}^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A}$  を満たすものとする。 $A, h(A)$  を部分解析的集合と仮定すると、 $\dim D(A) = \dim D(h(A))$  であるか。

この問題に対し、L. Paunescu と一緒に肯定的な結果を示した。

**定理 (1.6)**([9])  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A, B$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分解析的部分集合の  $0 \in \mathbb{R}^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A} \cap \overline{B}$  を満たすものとする。 $h(A), h(B)$  も部分解析的集合であると仮定すると、

$$\dim(D(h(A)) \cap D(h(B))) = \dim(D(A) \cap D(B))$$

が成り立つ。

**注意 (1.7)** 上の定理において、 $h$  は部分解析的写像であることを仮定していないことに注意する。もし、 $h$  がリプシッツかつ部分解析的写像であれば、定理の主張はほぼ自明である。

広中先生の部分解析的集合に対して成り立つ重要な性質に、曲線選択補題、局所有限な滑層分割の存在などがある。一方、実閉体上のオーミニマル構造の定義可能集合に対しても、同様に、曲線選択補題、有限セル分割の存在が知られている。そこで、塩田昌弘氏、Ta Lê Loi、L. Paunescu と一緒に、定理 (1.6) の実閉体上への一般化を考え、次の定理を示した。

**定理 (1.8)**([10])  $R$  を実閉体とする。 $h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A, B \subset R^n$  を  $R$  上のオーミニマル構造の定義可能部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A} \cap \overline{B}$  を満たすものとする。 $h(A), h(B)$  も定義可能集合であると仮定すると、

$$\dim(D(h(A)) \cap D(h(B))) = \dim(D(A) \cap D(B))$$

が成り立つ。ここで、 $D(*)$  は  $R^n$  のなかで定義された接方向集合である。

定理 (1.6) の証明に用いられた柱となる性質・議論は、次の 3 つである。

- (1) 昆布上性質 (sea-tangle properties)
- (2) 点列選択性性質 (sequence selection properties)
- (3) 体積比較議論 (volume arguments)

定理 (1.8) の証明にもそれらに対応するものが用いられるのだが、実閉体上のオーミニマル構造の定義可能集合に対しては、(1) については昆布上近傍の概念を変える必要が、(2) については点列選択性性質の仮定を強める必要が出てくる。(3) の体積にいたっては、一般の実閉体上では積分の理論がなく、我々の議論の対象の集合に対してのみ、非常に形式的な体積の概念を考える必要性が出てくる。また、非アルキメデスの実閉体  $R$  は一般に加算基を持たず、距離自体が  $R$  の数ではなく、数の集まりの区間として定義され、形式的な議論が必要になる。そこで、本稿では形式的な一般の場合は避け、幾何学的に捉え易いアルキメデス的な実閉体の場合に限って、定理 (1.8) の証明の概略を述べる。

上で定義無しに用いた、実閉体、アルキメデス的、オーミニマル構造、定義可能集合の概念については、次節でその定義を与える。

## §2. オーミニマル構造

順序体  $R$  が実閉体 (real closed field) とは、 $R[X]/\sqrt{X^2+1}$  が代数閉体のときにいう。実閉体  $R$  が  $R \subset \mathbb{R}$  のとき、アルキメデスの (Archimedean) という。

例 (2.1)  $\mathbb{R}_{alg}$  を代数的数全体からなる体とすると、アルキメデスの実閉体である。

$R = \mathbb{R}_{alg}$  とおき、 $R^2$  上の次で与えられる  $0 \in R^2$  に収束する点列を考える：

$$a_m = \left( \frac{1}{m}, \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{m!} \right) \right), \quad b_m = \left( 0, \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{m!} \right) \right)$$

このとき、リプシッツ同相写像  $h: (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$  で、 $h(a_m) = b_m$  となるものを構成することができる。 $m \rightarrow \infty$  とすると、

$$\frac{a_m}{\|a_m\|} \rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}, \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} \right) \notin R^2, \quad \frac{b_m}{\|b_m\|} \rightarrow (0, 1) \in R^2$$

$A = \{a_m\}$  とおくと、 $D(A) = \emptyset$  だが、 $D(h(A)) \neq \emptyset$  であることに注意しよう。このことは、 $\mathbb{R}_{alg}$  が完備距離空間でないことによる。

オーミニマル構造は L. Van den Dries によって導入された概念で、半代数的集合の基本的性質を備えているものである。基本的な参考文献として、L. Van den Dries [3]、L. Van den Dries - C. Miller [4]、M. Coste [2] を挙げておく。その定義を思い起こす。 $R$  を実閉体とする。

定義 (2.2)  $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$  とする。ただし、各  $\mathcal{S}_n$  は  $R^n$  の部分集合族とする。このとき、 $\mathcal{S}$  が  $(R, <, +, \cdot)$  上のオーミニマル構造 ( $\mathcal{o}$ -minimal structure) であるとは、以下が成り立つときにいう：

- (1) 各  $\mathcal{S}_n$  はブール代数である。
- (2)  $A \in \mathcal{S}_n$  かつ  $B \in \mathcal{S}_m$  ならば、 $A \times B \in \mathcal{S}_{n+m}$  である。
- (3)  $A \in \mathcal{S}_{n+m}$  で、 $\Pi: R^{n+m} \rightarrow R^n$  とする。そのとき、 $\Pi(A) \in \mathcal{S}_n$  である。
- (4)  $R^n$  のすべての代数的集合は、 $\mathcal{S}_n$  の要素である。
- (5)  $\mathcal{S}_1$  の要素は点と区間の有限和である。

$R^n$  の部分集合  $A$  は、 $A \in \mathcal{S}_n$  のとき、定義可能集合 (definable set) と呼ぶ。写像  $f: A \rightarrow R^m$  は、そのグラフが  $R^n \times R^m$  のなかの  $\mathcal{S}$  の定義可能部分集合のとき、定義可能という。

例 (2.3) (1)  $\mathcal{S}_n$  を  $R^n$  の半代数的集合 (semialgebraic set) の族とすると、 $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$  は  $\mathbb{R}$  上のオーミニマル構造である。

(2) A. Wilkie の指数体 (exponential field) ([15])

$n = 0, 1, 2, \dots$  とするとき、次の形をした集合

$$\{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k} : P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}, e^{y_1}, \dots, e^{y_k}) = 0\}$$

ただし、 $P: \mathbb{R}^{2(n+k)} \rightarrow \mathbb{R}$  は実多項式、の標準的な射影  $\mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  による  $\mathbb{R}^n$  への像達  
 が作る族を考えると、それは  $\mathbb{R}$  上のオーミニマル構造である。

### §3. 昆布状性質

これ以後、 $R$  はアルキメデスの実閉体を表すことにする。アルキメデスの実閉体上での接方向集合、実接錘は、定義 (1.2) の  $\mathbb{R}$  を  $R$  に替えたもので定義するものとする。

最初に、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $A$  (但し、 $0 \in \overline{A}$  を満たす) の昆布状近傍 (sea-tangle neighbourhood) の概念を思い起こす。 $d, C > 0$  とするとき、次数  $d$ 、幅  $C$  の  $A$  の昆布状近傍  $ST_d(A; C)$  を

$$ST_d(A; C) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, A) \leq C\|x\|^d\}$$

と定義する。この昆布上近傍に関して、次が成り立つ。

**命題 (3.1)** ([9])  $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分解析的部分集合の  $0 \in \mathbb{R}^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A}$  を満たすものとする。このとき、 $C > 0$  と  $d > 1$  が存在して、 $A \subset ST_d(A; C)$  が成り立つ。

これは、部分解析的集合の昆布状性質を証明していく上で重要な役割を果す命題で、曲線選択補題と通常の意味での Łojasiewicz 不等式 ([12]) を用いて示される。通常の意味での Łojasiewicz 不等式は、多項式的有限 (polynomially bounded) なオーミニマル構造の定義可能集合、写像に対してのみ成立することが知られている。実際、実数上の多項式的有限でないオーミニマル構造である Wilkie の指数体の定義可能集合に対し、上の命題は成立しない。従って、一般のアルキメデスの実閉体  $R$  上のオーミニマル構造の定義可能集合を扱うためには、昆布状近傍の概念を変える必要が出てくる。

$\Phi$  を  $(R, 0)$  から  $(R, 0)$  への奇関数で、狭義の増加・連続定義可能関数芽全体の集合とする。これを用いて、新たな昆布状近傍の定義を与える。

**定義 (3.2)**  $A \subset R^n$  を  $0 \in \overline{A}$  を満たす集合とし、 $\theta \in \Phi$  とする。このとき、 $A$  の昆布状近傍  $ST_\theta(A)$  を

$$ST_\theta(A) := \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, A) \leq \theta(\|x\|)\|x\|\}$$

と定義する。

$h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A$  を  $R^n$  の部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A}$  を満たすものとする。このとき、上の昆布上近傍に関して、次の性質が成立する。

**補題 (3.3)** (サンドウィッチ補題)  $\theta_1, \theta_2 \in \Phi$  で、

$$h(ST_{\theta_1}(A)) \subset ST_\theta(h(A)) \subset h(ST_{\theta_2}(A))$$

が成り立つものが存在する。

**命題 (3.4)** 任意の  $\theta \in \Phi$  に対し、 $D(ST_\theta(h(A))) = D(h(A))$  である。

次に、 $R^n$  の部分集合の  $0 \in R^n$  での芽  $A$  で、 $0 \in \overline{A}$  となるもの全体に、一つの同値関係を導入する。

**定義 (3.5)**  $A, B$  を  $R^n$  の部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A} \cap \overline{B}$  を満たすものとする。このとき、 $A$  と  $B$  が **ST-同値** (sea-tangle equivalent) であるとは、 $\theta_1, \theta_2 \in \Phi$  で、

$$A \subset ST_{\theta_1}(B) \text{ かつ } B \subset ST_{\theta_2}(A)$$

が成り立つものが存在するときいう。

**命題 (3.6)** ST-同値は、リブシッツ同相写像で保存される。

**命題 (3.7)**  $A \subset R^n$  がオーミニマル構造の定義可能集合なら、 $A$  と  $LD(A)$  は ST-同値である。

#### §4. 点列選択性性質

この節では、[9] で導入した点列選択性性質 (Sequence Selection Property) の概念を想起し、関連する性質を述べる。

**定義 (4.1)**  $A$  を  $R^n$  部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A}$  を満たすものとする。 $A$  が  $0 \in R^n$  で点列選択性性質 または 条件 (SSP) を満たすとは、 $0 \in R^n$  に収束する  $R^n$  の任意の点列  $\{a_m\}$  で

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{\|a_m\|} \in D(A)$$

となるものに対し、

$$\|a_m - b_m\| \ll \|a_m\|, \|b_m\|$$

が成り立つ点列  $\{b_m\} \subset A$  が存在するときいう。

**注意 (4.2)** (1) 条件 (SSP) は  $C^1$  不変だが、リブシッツ不変な性質ではない。

(2)  $0 \in R^n$  を頂点とする錘、 $\mathbb{R}^n$  の部分解析的集合、 $R$  上のオーミニマル構造の定義可能集合は、条件 (SSP) を満たす。

条件 (SSP) は、完備距離空間である実体上で威力を発揮し、次の命題が成り立つ。

**命題 (4.3)** ([9])  $h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$  をリブシッツ同相写像、 $A$  を  $R^n$  の部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \overline{A}$  を満たすものとする。このとき、 $A$  が条件 (SSP) を満たすなら、 $LD(h(A)) = LD(h(LD(A)))$  が成り立つ。

この命題は、例 (2.1) で見たように、一般のアルキメデスの実閉体上では成立しない。従って、条件 (SSP) の仮定を強める必要がある。

**命題 (4.4)**  $h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A \subset R^n$  を  $R$  上のオーミニマル構造の定義可能集合の  $0 \in R^n$  での芽とする。このとき、 $LD(h(A)) = LD(h(LD(A)))$  が成り立つ。

更に、 $h(A)$  が定義可能集合なら、 $LD(h(A)) = LD(h(LD(A)))$  も定義可能集合である。

## § 5. 定理 (1.8) の還元定理

$h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $A$  を  $R^n$  の部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \bar{A}$  を満たすものとし、 $A$ 、 $h(A)$  が  $R$  上のオーミニマル構造の定義可能集合とする。最初に、補題 (3.3)、命題 (3.4) を用いることによって、主定理の主張を以下のものに還元することができる：

**還元 (5.1)**  $\dim D(A) \geq \dim D(h(A))$

次に、 $\dim LD(A) = \dim h(LD(A))$  である事実と命題 (4.4) を用いることにより、還元 (5.1) の主張を以下のものに還元できる：

**還元 (5.2)**  $\dim h(LD(A)) \geq \dim LD(h(LD(A)))$

## § 5. 体積比較議論と定理 (1.8) の証明方針

本節の前半では、[9]、[10] で扱った体積比較に関する結果のうち、定理 (1.8) の証明のために重要なものを述べる。アルキメデスの実閉体  $R$  上には、オーミニマル構造が与えられているものとする。

最初に、いくつか記号を準備する。 $R^n (\subset \mathbb{R}^n)$  の部分集合  $A$  に対し、 $\bar{A}^{\mathbb{R}}$  は  $A$  の  $\mathbb{R}^n$  の中で取った閉包を表すものとする。また、 $\epsilon > 0$  に対して、 $B_\epsilon(0)$  は  $0 \in \mathbb{R}^n$  を中心にした  $\mathbb{R}^n$  の  $\epsilon$ -閉球を表すものとする。このとき、次の体積比較が成り立つ。

**命題 (6.1)**  $A, B$  を  $R^n$  の部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$  を満たすものとする。 $A$  と  $B$  は  $ST$ -同値であると仮定する。そのとき、 $\theta_1 \in \Phi$  で

$$\text{Vol}(\overline{ST_\theta(A)}^{\mathbb{R}} \cap B_\epsilon(0)) \approx \text{Vol}(\overline{ST_\theta(B)}^{\mathbb{R}} \cap B_\epsilon(0))$$

が、 $\theta \geq \theta_1$  を満たす任意の  $\theta \in \Phi$  に対し成立するものが存在する。

**系 (6.2)**  $\alpha \subset R^n$  を  $R^n$  の定義可能部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \bar{\alpha}$  を満たすものとし、 $\beta \subset R^n$  を  $0 \in R^n$  を頂点とする定義可能錘とする。 $\dim \alpha < \dim \beta$  を仮定する。そのとき、 $\theta_1 \in \Phi$  で

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\overline{ST_\theta(\alpha)}^{\mathbb{R}} \cap B_\epsilon(0))}{\text{Vol}(\overline{ST_\theta(\beta)}^{\mathbb{R}} \cap B_\epsilon(0))} = 0$$

が、 $\theta \geq \theta_1$  を満たす任意の  $\theta \in \Phi$  に対し成立するものが存在する。



命題 (6.1) と系 (6.2) 他を用いることにより、定理 (1.8) の証明のキーとなる次の補題を示すことができる。

**補題 (6.3)**  $h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$  をリプシッツ同相写像、 $E$  を  $R^n$  の定義可能部分集合の  $0 \in R^n$  での芽で、 $0 \in \overline{E}$  を満たすものとし、 $F := h(E)$  とおく。 $F$  と  $LD(F)$  は  $ST$ -同値、 $LD(F)$  は定義可能集合であると仮定する。そのとき、 $\dim LD(F) \leq \dim E$  が成り立つ。

前節で述べた還元定理により、定理 (1.8) を示すためには、還元 (5.2) を示せばよい。そこで、 $A$  と  $h(A)$  が定義可能集合と仮定する。そのとき、 $LD(A)$  は定義可能集合であり、命題 (3.7) より、 $A$  と  $LD(A)$ 、 $h(A)$  と  $LD(h(A))$  は  $ST$ -同値である。一方、命題 (3.6) より、 $h(A)$  と  $h(LD(A))$  は  $ST$ -同値である。また、命題 (4.4) より、 $LD(h(A)) = LD(h(LD(A)))$  で、これは定義可能集合である。従って、 $h(LD(A))$  と  $LD(h(LD(A)))$  は  $ST$ -同値であり、後者は定義可能集合である。その結果、補題 (6.3) が、 $E = LD(A)$ 、 $F = h(LD(A))$  として適用でき、還元 (5.2) が示される。

## REFERENCES

- [1] J. Briançon and J.P. Speder, *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C. R. Acad. Sci. Paris **280** (1975), 365–367.
- [2] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Pisa. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000.
- [3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, LMS Lecture Notes Series **248**, Cambridge University Press, 1997.
- [4] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. Journal, **84** (1996), 497–540.
- [5] T. Fukui, S. Koike and T.-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, Real Analytic and Algebraic Singularities (T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, eds.), Pitman Research Notes in Mathematics Series **381**, Longman, 1998, pp. 8–29.
- [6] T. Fukui, L. Paunescu : *On blow-analytic equivalence*, in "Arc Spaces and Additive Invariants in Real Algebraic Geometry", Proceedings of Winter School "Real algebraic and Analytic Geometry and Motivic Integration", Aussois 2003, Panoramas et Synthèses **24** (2008), Société Mathématique de France, 87–125.
- [7] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Yasuo Akizuki, pp. 453–493, Kinokuniya, Tokyo, 1973.
- [8] S. Koike, *The Briançon-Speder and Oka families are not biLipschitz trivial*, Several Topics in Singularity Theory, RIMS Kokyuroku **1328** (2003), 165–173.
- [9] S. Koike and L. Paunescu, *The directional dimension of subanalytic sets is invariant under bi-Lipschitz homeomorphisms*, Annales de l'Institut Fourier **59** (2009), 2445–2467.
- [10] S. Koike, Ta Lê Loi, L. Paunescu and M. Shiota, *Directional properties of sets definable in o-minimal structure*, current preprint 23 pages, arXiv:1033.0244.
- [11] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. math. **82** (1985), 257–262.
- [12] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*. Inst. Hautes Etudes Sci. Lecture Note, 1967.

- [13] M. Oka, *On the weak simultaneous resolution of a negligible truncation of the Newton boundary*, Contemporary Math. **90** (1989), 199–210.
- [14] B. Teissier *Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse, Astérisque, **7 et 8** (1973), 285–362.
- [15] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential functions*, Jour. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 1051–1094.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HYOGO UNIVERSITY OF TEACHER EDUCATION, 942-1 SHIMOKUME,  
KATO, HYOGO 673-1494, JAPAN

*E-mail address:* koike@hyogo-u.ac.jp